Домашнее задание по ТФКП

Задача 1. Выполнить указанные действия над комплексными числами z_1 и z_2 (табл. 1).

Таблица 1.

1	2	3	4	5	6
№ варианта	z_1	z_2	Найти		
			а	б	в
1	$1-i\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)^2$	$\sqrt[3]{\overline{z_2}}$
2	$1+i$	$3-i$	$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$	$\frac{z_1}{z_2^2}$	$\sqrt[4]{z_1^3}$
3	$1+i\sqrt{3}$	$2-i\sqrt{3}$	$\overline{z_1} \cdot z_2$	$\frac{z_1^2}{\overline{z_2}}$	$\sqrt[3]{\overline{z_1}^{2}}$
4	$2-2i$	$1+3i$	$\overline{z_1} \cdot z_2$	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$	$\sqrt[3]{\overline{z_1}^{4}}$
5	$3+2i$	$2+2i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{\overline{z_1}^{2}}{z_2}$	$\sqrt[5]{\overline{z_2}^{4}}$
6	$7+i$	$3-3i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{\overline{z_1}^{2}}{z_2}$	$\sqrt[3]{\overline{z_2}^{2}}$
7	$5-5i$	$2-i$	$\overline{z_1} \cdot z_2^2$	$\left(\frac{z_1}{\overline{z_2}}\right)^2$	$\sqrt[4]{\overline{z_1}}$
8	$4+4i$	$4-3i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{\overline{z_1}}{z_2}$	$\sqrt[5]{\overline{z_1^2}}$
9	$2-2i\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+2i$	$z_1 \cdot z_2^2$	$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)^2$	$\sqrt[3]{\overline{z_1^2}}$
10	$2\sqrt{3}+2i$	$1+i\sqrt{3}$	$z_1 \cdot \overline{z_2}^{2}$	$\frac{\overline{z_2}}{z_1}$	$\sqrt[5]{z_1^3}$
11	$-4-4i$	$3+2i$	$z_1^2 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{z_2}{z_1}$	$\sqrt[5]{\overline{z_1^3}}$
12	$-3+3i$	$2+i$	z_2^5	$\frac{z_1^2}{\overline{z_2}}$	$\sqrt[3]{\overline{z_1}}$
13	$4-3i$	$1+7i$	$z_1^2 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{z_1}{\overline{z_2}}$	$\sqrt{z_1 \cdot z_2}$
14	$5-12i$	$2+2i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}^{2}$	$\frac{\overline{z_1}}{z_2^2}$	$\sqrt[4]{\overline{z_2^3}}$

15	$\frac{7+24i}{5}$	$-5+5i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}^2$	$\frac{z_2}{z_1}$	$\sqrt[5]{\overline{z_2}}$
16	$-3-4i$	$-4+4i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)^2$	$\sqrt[3]{-\frac{\overline{z_2}}{2}}$
17	$1+i\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}+2i$	$z_1^2 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{z_2}{\overline{z_1}}$	$\sqrt[3]{z_1 \cdot z_2}$
18	$2\sqrt{3}-2i$	$3-3i\sqrt{3}$	$\overline{z_1 \cdot z_2}$	$\frac{z_1^2}{z_2}$	$\sqrt[4]{\overline{z_2^2}}$
19	$3\sqrt{3}+3i$	$1+i\sqrt{3}$	$z_1 \cdot \overline{z_2}^2$	$\frac{3z_2}{\overline{z_1}}$	$\sqrt[3]{\overline{z_1^2}}$
20	$-4-4i$	$2+3i$	$\overline{z_1} \cdot z_2^2$	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$	$\sqrt[5]{\overline{z_1^3}}$
21	$-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	$\sqrt{8}-i\sqrt{8}$	$z_1^2 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{\overline{z_2}}{z_1}$	$\sqrt[3]{\overline{z_2^2}}$
22	$4+3i$	$3+4i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$	$\sqrt[4]{z_1 \cdot z_2}$
23	$7+24i$	$24-7i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$	$\sqrt[5]{\frac{z_1}{z_2}}$
24	$2+i$	$1-2i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}^2$	$\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)^2$	$\sqrt[4]{\frac{z_2}{z_1}}$
25	$3+i$	$1-3i$	$z_1^2 \cdot \overline{z_2}$	$\frac{\overline{z_2}}{z_1}$	$\sqrt{z_1 \cdot \overline{z_2}}$
26	$7+i$	$1+7i$	$z_1 \cdot \overline{z_2}$	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$	$\sqrt[4]{\frac{z_1}{\overline{z_2}}}$
27	$1-2i$	$4-2i$	$z_1^2 \cdot z_2^2$	$\frac{z_1}{z_2}$	$\sqrt[3]{\frac{z_2}{\overline{z_1}}}$
28	$3-4i$	$-4+3i$	$\left(\overline{z_1 \cdot z_2}\right)^2$	$\frac{z_2}{z_1}$	$\sqrt{z_1 \cdot z_2}$
29	$4+4i$	$2-2i$	$z_1 \cdot z_2^2$	$\frac{z_1^2}{\overline{z_2}}$	$\sqrt[3]{\frac{z_1}{\overline{z_2}}}$
30	$1+i\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}+2i$	$z_1^2 \cdot \overline{z_2}$	$\left(\frac{z_2}{\overline{z_1}}\right)^2$	$\sqrt[4]{\overline{z_2}}$

Задача 2.

(а) Построить область D_1 в комплексной плоскости z, определяемую данными неравенствами. Границы, принадлежащие области, изобразить сплошными линиями, не принадлежащие – пунктирными.

(б) Построить область D_2 в комплексной плоскости Z, определяемую данными неравенствами, и найти область комплексной плоскости W, в которую отображается с помощью функции $w = f(z)$ область D_2 (табл. 2).

Таблица 2.

№ варианта	Область D_1	$w = f(z)$	Область D_2
1	2	3	4
1	$\begin{cases} \lvert z-1 \rvert > 1 \\ \lvert z+1 \rvert \ge 1 \end{cases}$	$w = \dfrac{1}{z}$	$0 < \operatorname{Im} z \le \sqrt{\operatorname{Re} z}$
2	$\begin{cases} \lvert z-2 \rvert > 2 \\ \lvert z-4 \rvert \le 4 \end{cases}$	$w = -\dfrac{\sqrt{2}}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \ge 1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \lvert z-1 \rvert > 2 \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{Re} z < 3 \end{cases}$	$w = \dfrac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} \operatorname{Im} z \le \operatorname{Re} z \le \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + 1} \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \lvert z-2 \rvert \le 1 \\ \operatorname{Re} z > 1.5 \\ \operatorname{Im} z \ge -0.5 \end{cases}$	$w = \dfrac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} \left\lvert z - \dfrac{1}{2} \right\rvert \le \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \lvert z \rvert \ge 1 \\ \lvert z+\sqrt{2} \rvert + \lvert z-\sqrt{2} \rvert \le 2\sqrt{3} \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$	$w = \dfrac{2}{\bar{z}}$	$\begin{cases} \lvert z+1 \rvert \ge 1 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \\ \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \lvert z-1 \rvert \le 1 + \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Re} z < 2 \end{cases}$	$w = \sqrt{\bar{z}}$	$\begin{cases} \lvert z+i \rvert \ge 1 \\ \operatorname{Re} z \ge 0 \\ \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \lvert z+2 \rvert - \lvert z-2 \rvert \ge 2\sqrt{3} \\ \operatorname{Re} z < 3 \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3} \\ \operatorname{Re} z \le 4 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \lvert z-2 \rvert \le 2 \\ \lvert z-1 \rvert > 1 \\ \lvert z-3 \rvert \ge 1 \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$	$w = \dfrac{1}{z}$	$0 \le \operatorname{Re} z \le \sqrt{\operatorname{Im} z}$

9	$\begin{cases} \lvert z+2\rvert-\lvert z-2\rvert\le 2\sqrt{3} \\ 0\le \arg z\le \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$w=\frac{2}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z\cdot \operatorname{Im} z\ge -1 \\ \operatorname{Re} z>0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \lvert z-i\rvert\ge 1+\operatorname{Im} z>0 \\ -2\le \operatorname{Re} z\le 2 \end{cases}$	$w=\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Im} z\ge \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+1} \\ \operatorname{Re} z\ge 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \lvert z-1-i\rvert<\sqrt{2} \\ \operatorname{Re} z\cdot \operatorname{Im} z\ge 1 \end{cases}$	$w=\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \lvert z\rvert\le 1 \\ \operatorname{Re} z\ge 0 \\ \operatorname{Im} z\ge 0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \lvert z+\sqrt{2}\rvert-\lvert z-\sqrt{2}\rvert<2 \\ \lvert z-1\rvert\le 1 \end{cases}$	$w=\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert\le 1 \\ \operatorname{Im} z\ge 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 0\le \lvert z+\sqrt{2}\rvert-\lvert z-\sqrt{2}\rvert<2 \\ \lvert z+\sqrt{3}\rvert+\lvert z-\sqrt{3}\rvert<4 \end{cases}$	$w=\sqrt{z}$	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert\le 1 \\ \operatorname{Re} z\le 1 \\ \operatorname{Im} z\ge 0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} \lvert z-i\rvert\le \operatorname{Im} z+1 \\ \lvert z+2\rvert+\lvert z-2\rvert\ge 2\sqrt{5} \\ \operatorname{Im} z\le 2 \end{cases}$	$w=\sqrt{z}$	$\begin{cases} 1\le \operatorname{Re} z\le 4 \\ 0\le \operatorname{Im} z\le 2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \lvert z+\sqrt{2}\rvert-\lvert z-\sqrt{2}\rvert\le 2 \\ \lvert z-1\rvert<1+\operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z\ge 0 \end{cases}$	$w=-\frac{1}{z}$	$-\sqrt{-\operatorname{Re} z}\le \operatorname{Im} z<0$
16	$\begin{cases} \lvert z-i\rvert\le 1+\operatorname{Im} z \\ \arg z\le \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Im} z\le 2 \end{cases}$	$w=\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z\cdot \operatorname{Im} z\le \frac{1}{2} \\ \operatorname{Re} z>0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \lvert z^2-1\rvert\le 1 \\ \operatorname{Re} z>0 \end{cases}$	$w=-\frac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} -\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+1}\le \operatorname{Im} z\le \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Re} z\le 0 \end{cases}$
18	$\begin{cases} \lvert z-1-i\rvert\ge 1 \\ \lvert z-1+i\rvert\ge 1 \\ \lvert z-1\rvert<1 \end{cases}$	$w=\frac{1}{\bar{z}}$	$\begin{cases} \lvert z\rvert\ge 1 \\ \operatorname{Re} z\le 0 \\ \operatorname{Im} z\ge 0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} \lvert z-1\rvert>1+\operatorname{Re} z \\ \lvert z+1\rvert+\lvert z-1\rvert\le 2\sqrt{2} \end{cases}$	$w=\sqrt{z}$	$\begin{cases} \lvert z-i\rvert\ge 1 \\ \operatorname{Re} z\ge 0 \\ \operatorname{Im} z\ge 0 \end{cases}$

20	$\begin{cases} \left\|z^2-1\right\| \ge 1 \\ \left\|z-\sqrt{2}\right\| < 2 \end{cases}$	$w=\sqrt{z}$	$\begin{cases} \left\|z-i\right\| \ge 1 \\ \operatorname{Re} z \ge 0 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$
21	$\begin{cases} \left\|z-i\right\| < 1+\operatorname{Im} z \\ \left\|z+i\sqrt{2}\right\|-\left\|z-i\sqrt{2}\right\| \le 2 \end{cases}$	$w=\sqrt{\overline{z}}$	$\begin{cases} 4 \le \operatorname{Re} z \le 9 \\ -2 \le \operatorname{Im} z \le 2 \end{cases}$
22	$\begin{cases} \left\|z\cdot\overline{z}\right\|^2 > \operatorname{Re}\left(z^2\right) \\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4} \\ \left\|z-1\right\| \le 1 \end{cases}$	$w=\sqrt{\overline{z}}$	$\begin{cases} 0 \le \operatorname{Re} z \le 4 \\ -8 \le \operatorname{Im} z \le 8 \end{cases}$
23	$\begin{cases} \left\|z-1\right\| \le 1+\operatorname{Re} z \\ \left\|z+1\right\|+\left\|z-1\right\| > 2\sqrt{2} \end{cases}$	$w=-\dfrac{1}{z}$	$0 \le \operatorname{Re} z \le \sqrt{-\operatorname{Im} z}$
24	$\begin{cases} \left\|z+i\sqrt{5}\right\|-\left\|z-i\sqrt{5}\right\| \le 4 \\ \operatorname{arctg} 2 < \operatorname{arctg} z < \pi-\operatorname{arctg} 2 \end{cases}$	$w=-\dfrac{1}{\overline{z}}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Im} z \ge -\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} \left\|z\cdot\overline{z}\right\|^2 < \operatorname{Im} z^2 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	$w=\dfrac{2}{z}$	$\begin{cases} -\sqrt{\left(\operatorname{Re} z\right)^2+1} \le \operatorname{Im} z < 0 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$
26	$\left\|z\right\|-2 \le \operatorname{Re} z < 2-\left\|z\right\|$	$w=\dfrac{1}{z}$	$\begin{cases} \left\|z-\dfrac{i}{2}\right\| \ge \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{Re} z \ge 0 \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$
27	$\begin{cases} \left\|z+i\sqrt{3}\right\|-\left\|z-i\sqrt{3}\right\| \ge 2\sqrt{2} \\ \left\|z+i\sqrt{3}\right\|+\left\|z-i\sqrt{3}\right\| < 4 \end{cases}$	$w=\sqrt{\overline{z}}$	$\begin{cases} \left\|z+1\right\| \le 1 \\ \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$
28	$\begin{cases} \left\|z-1-i\right\| \le 1 \\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z > 2 \\ \arg z > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$	$w=\sqrt{z}$	$\begin{cases} 0 \le \operatorname{Re} z \le 1 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 2 \end{cases}$
29	$\begin{cases} \left\|z\cdot\overline{z}\right\|^2 \ge 2\operatorname{Im}\left(z^2\right) \\ \left\|z-1-i\right\| < 1 \end{cases}$	$w=\sqrt{z}$	$\begin{cases} -1 \le \operatorname{Re} z \le 1 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 4 \end{cases}$
30	$\begin{cases} \left\|z+i\sqrt{3}\right\|+\left\|z-i\sqrt{3}\right\| \ge 4 \\ \left\|z\right\| < 2 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$	$w=\sqrt{\overline{z}}$	$\begin{cases} -4 \le \operatorname{Re} z \le 4 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 8 \end{cases}$

Задача 3. Вычислить значения данных функций $f(z)$ и $g(z)$ при указанных значениях комплексного переменного z (табл. 3).

Таблица 3.

№ варианта	(a) $f(z)$	z	$g(z)$	z
1	2	3	4	5
1	$\operatorname{tg} z$	$\frac{\pi}{4}+i$	$\operatorname{Ln} z$	$2-3i$
2	$\operatorname{ch} z$	$2-\frac{\pi i}{2}$	e^z	$2+\frac{\pi i}{3}$
3	$\sin z$	$\frac{\pi}{3}+2i$	$\operatorname{Ln} z$	$3-4i$
4	$\operatorname{th} z$	$1-\frac{\pi i}{2}$	e^z	$-1-\frac{2\pi i}{3}$
5	$\cos z$	$\frac{\pi}{6}+i$	$\ln z$	$-3+i$
6	$\operatorname{sh} z$	$1+\frac{\pi i}{4}$	e^z	$0.5+\pi i$
7	$\operatorname{ctg} z$	$\frac{\pi}{3}-i$	$\ln z$	$-2-2i$
8	$\operatorname{ch} z$	$1+\frac{\pi i}{4}$	e^z	$-0.5-\frac{\pi i}{2}$
9	$\sin z$	$\frac{\pi}{2}+i$	$\ln z$	$-5+12i$
10	$\operatorname{cth} z$	$-1+\frac{\pi i}{3}$	e^z	$-1+\frac{\pi i}{3}$
11	$\cos z$	$\frac{\pi}{2}+3i$	$\ln z$	$-4-3i$
12	$\operatorname{sh} z$	$2-\frac{\pi i}{2}$	e^z	$1-\frac{\pi i}{4}$
13	$\operatorname{tg} z$	$\frac{\pi}{6}+2i$	$\ln z$	$-3-3i$
14	$\operatorname{sh} z$	$2+\frac{\pi i}{4}$	e^z	$-0.5+\frac{3}{4}\pi i$
15	$\cos z$	$\frac{\pi}{2}+3i$	$\operatorname{Ln} z$	$2-4i$
16	$\operatorname{cth} z$	$1-\frac{\pi i}{4}$	e^z	$0.1+\frac{\pi i}{2}$
17	$\sin z$	$\frac{\pi}{6}-i$	$\ln z$	$-3+i$
18	$\operatorname{ch} z$	$2-\frac{\pi i}{6}$	e^z	$2(1+i)$
19	$\operatorname{th} z$	$1+\frac{\pi i}{3}$	$\operatorname{Ln} z$	$\frac{1+i}{1-i}$
20	$\sin z$	$\frac{\pi}{2}+2i$	e^z	$\frac{\pi(1-i)}{2}$
21	$\operatorname{ch} z$	$2-\pi i$	$\operatorname{Ln} z$	$\frac{2-i}{2+i}$

22	$\operatorname{ctg} z$	$\frac{\pi}{4}+2i$	e^z	$-\frac{\pi}{2}(1+2i)$
23	$\operatorname{sh} z$	$\frac{1+\pi i}{2}$	$\ln z$	$\frac{1+2i}{-1+2i}$
24	$\cos z$	$\frac{\pi+2i}{2}$	e^z	$-1-\frac{3}{4}\pi i$
25	$\operatorname{cth} z$	$2-\pi i$	$\operatorname{Ln} z$	$5-12i$
26	$\sin z$	$\frac{\pi}{4}+i$	e^z	$2+\frac{\pi i}{3}$
27	$\operatorname{sh} z$	$2+\frac{\pi i}{4}$	$\operatorname{Ln} z$	$24-7i$
28	$\operatorname{ctg} z$	$\frac{\pi}{2}+2i$	e^z	$-2+\frac{\pi i}{6}$
29	$\operatorname{ch} z$	$1-\frac{\pi i}{3}$	$\ln z$	$3+4i$
30	$\cos z$	$\frac{\pi}{3}-i$	e^z	$1.5+\frac{\pi i}{2}$

Задача 4. Проверить, является ли функция $w=f(z)$ аналитической, и если да, то и найти ее производную $f'(z)$ (табл. 4).

Таблица 4.

№ варианта	$f(z)$	№ варианта	$f(z)$
1	2	3	4
1	$\frac{1}{1+z}$	16	$1+\frac{1}{\bar{z}}$
2	$\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)$	17	$\frac{1}{\bar{z}-1}$
3	$\ln(1+z)$	18	$(1+\bar{z})^3$
4	$\frac{1}{1+\bar{z}}$	19	$\sin\left(2\bar{z}+\frac{\pi}{4}\right)$
5	$\operatorname{ch}(\bar{z}-2)$	20	$\ln\frac{\bar{z}}{z}$
6	$\ln(1+\bar{z})$	21	$z^2+\bar{z}^2$
7	$\operatorname{sh}(z+1)$	22	$z+\frac{1}{z}$
8	e^{1+z}	23	$\bar{z}+\frac{1}{z}$
9	$e^{\bar{z}^2}$	24	$z\cdot\bar{z}$
10	$\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$	25	$\frac{\bar{z}}{z}$
11	$e^{\bar{z}-1}$	26	$\sin 2z$
12	$\frac{1}{1-z}$	27	$\operatorname{ch}\frac{z}{2}$

13	$\ln(\bar{z}-1)$	28	$\ln(z-1)$
14	e^{z^2}	29	$1-\dfrac{1}{z}$
15	$(z+1)^2$	30	$\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}$

Задача 5. Проверить, является ли функция $u(x, y)$ действительной (или функция $v(x, y)$ мнимой) частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и, если да, то найти эту функцию (табл. 5).

Таблица 5.

№ варианта	Функция	№ варианта	Функция
1	2	3	4
1	$u(x,y)=\sin y \operatorname{ch} x$	16	$v(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$
2	$v(x,y)=\cos y \operatorname{ch} x$	17	$u(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$
3	$v(x,y)=e^{x}\operatorname{ch} y$	18	$v(x,y)=-\ln\left(x^2+y^2\right)$
4	$u(x,y)=e^{-x}\sin y$	19	$v(x,y)=x^3-3xy^2$
5	$v(x,y)=e^{y}\sin x$	20	$u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$
6	$u(x,y)=e^{y}\cos x$	21	$v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$
7	$u(x,y)=e^{y}\operatorname{sh} x$	22	$v(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$
8	$v(x,y)=\sin y \sin x$	23	$u(x,y)=-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$
9	$v(x,y)=\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$	24	$u(x,y)=3x^2y-y^3$
10	$u(x,y)=-\operatorname{sh} x \sin y$	25	$u(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$
11	$u(x,y)=e^{-2x}\sin 2y$	26	$v(x,y)=e^{2x}\cos 2y$
12	$v(x,y)=\operatorname{sh} 2x \cos 2y$	27	$v(x,y)=-e^{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{y}{2}$
13	$v(x,y)=\operatorname{ch} 2x \cos 2y$	28	$u(x,y)=\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}$
14	$v(x,y)=\operatorname{sh} 3x \sin 3y$	29	$u(x,y)=e^{x-y}$
15	$u(x,y)=e^{2y}\sin 2x$	30	$v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Задача 6. Найти круг сходимости степенного ряда (табл. 6) и исследовать сходимость в трёх заданных точках $z_1,\ z_2,\ z_3$ (сходится абсолютно, сходится условно или расходится).

Таблица 6.

№ варианта	Ряд	Точки
1	2	3
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^{2n-1}}{2^n(n+\ln n)}$	$z_1=2i, z_2=3i, z_3=\sqrt{2}+i$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-i)^{2n}}{3^n\left(n^2+n\ln n\right)}$	$z_1=0, z_2=\sqrt{3}-1+i, z_3=2+i$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1-i)^{n}}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	$z_1=0, z_2=3+i, z_3=1+3i$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^{2n-1}}{(n+1)^2\ln(n+1)}$	$z_1=0, z_2=3i, z_3=1+2i$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1+2i)^{n}}{2^n(n+1)\ln^2(n+1)}$	$z_1=0, z_2=1+2i, z_3=-1$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(z-1+i)^{n}}{3^n\left(n+\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)}$	$z_1=0, z_2=\dfrac{5}{2}-i, z_3=1+\dfrac{i}{2}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\dfrac{(z+2i)^{2n}}{\sqrt{n+\ln n}}$	$z_1=0, z_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2i, z_3=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-2\right)i$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^{n}}{(2i)^n(n+1+\operatorname{arctg} n)}$	$z_1=0, z_2=3i, z_3=2+i$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1+2i)^{2n}}{(4i)^n(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	$z_1=0, z_2=1-2i, z_3=-1$
10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2+i)^{2n+1}}{3^n\left[(n+1)^2+\ln^2(n+1)\right]}$	$z_1=0, z_2=2+\sqrt{2}, z_3=2+i\left(\sqrt{3}-1\right)$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-2i)^{n}}{(2i)^n\sqrt{(n+1)^3+2n\ln n}}$	$z_1=0, z_2=1+2i, z_3=-1+4i$
12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\dfrac{(z-2i)^{n}}{n+1+\sin n\alpha}$	$z_1=1, z_2=\dfrac{2}{3}+2i, z_3=\dfrac{8}{3}i$

13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n(z+1)^{2n}}{\sqrt{n+1+\arcsin\frac{1}{n}}}$	$z_1=0, z_2=-1+\frac{i}{\sqrt{2}}, z_3=-\frac{3}{2}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n(z+3i)^{2n}}{3^n(n^2+1)}$	$z_1=0, z_2=3-3i, z_3=i$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1+i)^{2n}}{4^n n\sqrt{n+1}}$	$z_1=0, z_2=3-i, z_3=1+i$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+2i)^n}{3^n\sqrt{n^3+1}}$	$z_1=0, z_2=2+i, z_3=-1-3i$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+1+i)^{2n}}{9^n\sqrt{n+1}}$	$z_1=0, z_2=2-i, z_3=-1+2i$
18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(z-i\sqrt{2}\right)^{2n}}{2^n\cdot\sqrt[3]{n^2+n\ln n}}$	$z_1=0, z_2=\sqrt{2}(1+i), z_3=1$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(z+i\sqrt{3}\right)^{2n-1}}{3^n(n+1)\ln^3(n+1)}$	$z_1=0, z_2=\sqrt{3}(1-i), z_3=-1$
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1+i)^{2n-1}}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	$z_1=0, z_2=1+i, z_3=1-2i$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n\left(z+1+\frac{i}{2}\right)^n}{2^n(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	$z_1=0, z_2=-1+\frac{3}{2}i, z_3=1-\frac{i}{2}$
22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2+3i)^{2n}}{4^n\left[n+1+\ln^2(n+1)\right]}$	$z_1=2-i, z_2=4-3i, z_3=1-2i$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-2i)^{2n-1}}{5^n(n+1)\ln^3(n+1)}$	$z_1=0, z_2=1+i, z_3=1$
24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2+2i)^n}{3^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$	$z_1=0, z_2=-1-2i, z_3=5-i$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n n^2(z+3-i)^n}{3^n\ln(n+1)}$	$z_1=0, z_2=-3-2i, z_3=-1+i$
26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)(z-2)^{2n}}{2^n\left(1+\sin^2 n\alpha\right)}$	$z_1=0, z_2=2+\sqrt{2}, z_3=2+i$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\ln n)(z-1+i)^{2n}}{2^n}$	$z_1=0, z_2=1, z_3=1+\sqrt{2}-i$

28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)(z-1)^{2n-1}}{3^n}$	$z_1=1+\sqrt{3}, z_2=1+i\sqrt{3}, z_3=0$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+2i)^n\cdot 2^{2n}}{3^n\left(n+\sqrt{n}\right)}$	$z_1=0, z_2=\frac{3}{4}-2i, z_3=-\frac{5}{4}i$
30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n\left(z-i\sqrt{2}\right)^{2n}}{2^n\sqrt{n^2+1}}$	$z_1=0, z_2=2i\sqrt{2}, z_3=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

Задача 7. Разложить функцию $f(z)$ по степеням $z-z_0$. Указать области существования найденных разложений. Сделать поясняющий чертеж (табл. 7).

Таблица 7.

№ варианта	$f(z)$	$z-z_0$	№ варианта	$f(z)$	$z-z_0$
1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{z^2(z-1)}$	$z-1$	16	$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^3$	z
2	$\frac{z}{z^2-5z+4}$	$z-2$	17	$\frac{1}{z(z+2)}$	z
3	$\frac{z+2}{\left(z^2+2z+5\right)^2}$	$z+1$	18	$\frac{z}{\left(z^2-1\right)^3}$	$z+1$
4	$\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{4}}$	$z-\frac{\pi}{4}$	19	$\frac{1}{z^3-z}$	z
5	$\frac{z}{z^2+1}$	z	20	$\frac{1}{z\left(z^2-4\right)}$	$z+2$
6	$\frac{1}{z\left(z^2-1\right)}$	$z+1$	21	$\frac{\sin^2 z}{\left(z-\frac{\pi}{8}\right)^2}$	$z-\frac{\pi}{8}$
7	$\frac{z+4}{\left(z^3+6z^2+12z\right)^2}$	$z+2$	22	$\frac{1}{(z-1)\left(z^2+4\right)}$	z
8	$\frac{1}{z(z+2)}$	$z+1$	23	$\frac{\cos^2 z}{\left(z+\frac{\pi}{8}\right)^2}$	$z+\frac{\pi}{8}$
9	$\frac{z}{\left(z^2-4\right)^2}$	$z-2$	24	$\frac{i}{(z+1)\left(z^2-4\right)}$	z

10	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$	z	25	$\frac{1}{1+z+z^2}$	z
11	$\frac{1}{z(z-2)}$	$z-1$	26	$\frac{1}{z+1}\cos^2\frac{1}{z+1}$	$z+1$
12	$\frac{1}{(z+1)(z+2)^3}$	$z+1$	27	$\left(\frac{\cos z}{z}\right)^3$	z
13	$\frac{\cos z}{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2}$	$z+\frac{\pi}{4}$	28	$\frac{1}{1-z+z^2}$	z
14	$(z-1)^2\sin^2\frac{1}{z-1}$	$z-1$	29	$\frac{z+2}{\left(z^3+3z^2+3z\right)^2}$	$z+1$
15	$\frac{\sin z}{\left(z-\frac{3}{4}\pi\right)^3}$	$z-\frac{3}{4}\pi$	30	$\frac{z}{\left(z^2-2z\right)^3}$	$z-1$

Задача 8. Для функции $f(z)$ найти все изолированные особые точки (табл. 8), определить их тип и найти вычеты в них (включая бесконечно удаленную точку).

Таблица 8.

№ варианта	$f(z)$	№ варианта	$f(z)$
1	2	3	4
1	$\frac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$	16	$\frac{1}{1-z^2}e^{\frac{1}{z}}$
2	$\frac{\operatorname{sh} z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$	17	$\frac{1}{1+z^2}\sin\frac{1}{z}$
3	$\frac{\sin z}{\left(z^2-\pi^2\right)^2}$	18	$\frac{z}{1-z^2}\operatorname{ch}\frac{1}{z}$
4	$\frac{\operatorname{ch} z}{\left(z^2+\pi^2\right)^3}$	19	$\frac{z}{1+z^2}\cos\frac{1}{z}$
5	$\frac{\cos z}{\left(z^2-\pi^2\right)^3}$	20	$\frac{1}{(1-z)^2}\operatorname{sh}\frac{1}{z}$
6	$\frac{z^2+4}{\left(z^2+3z+2\right)^2}$	21	$\frac{1}{(1+z)^2}\cos\frac{1}{z}$
7	$\frac{(z+1)^2}{\left(z^2-3z+2\right)^2}$	22	$\frac{1}{(1-z)^2}\sin\frac{1}{z}$

8	$\dfrac{e^{iz}}{\left(z^2-\pi^2\right)^2}$	23	$\dfrac{1}{z\left(1-z^2\right)}\cos\dfrac{1}{z}$
9	$z^3 e^{-\frac{1}{z^2}}$	24	$\dfrac{1}{z\left(1+z^2\right)}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$
10	$z^3\cos\dfrac{1}{z^2}$	25	$\dfrac{1}{1+z^2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$
11	$z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$	26	$\dfrac{z}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$
12	$\dfrac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$	27	$\dfrac{1}{z(1+z)}\cos\dfrac{1}{z}$
13	$\dfrac{1}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$	28	$\dfrac{z}{1+z}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$
14	$\dfrac{1}{1+z}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$	29	$\dfrac{1}{z(1-z)}\sin\dfrac{1}{z}$
15	$\dfrac{1}{(1-z)^2}e^{\frac{1}{z}}$	30	$\dfrac{z}{1+z}e^{-\frac{1}{z}}$

Задача 9. Вычислить интеграл по указанному контору C в положительном направлении, применяя в вариантах № 1 – 15 теорему о вычетах, а в вариантах № 16 – 30 интегральную формулу Коши или интегральное выражение для n-ой производной (табл. 9).

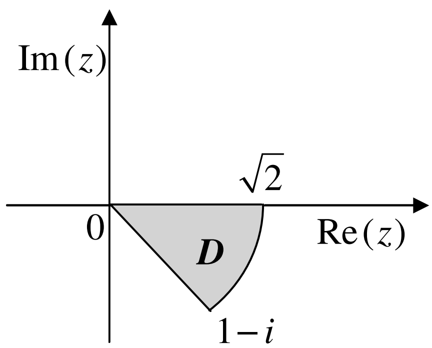
Таблица 9.

№ варианта	Интеграл	Контур C
1	2	3
1	$\oint\limits_C \dfrac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$	$\lvert z+i\rvert=1$
2	$\oint\limits_C \dfrac{dz}{\left(z^2-1\right)^3}$	$\lvert z-1\rvert=1$
3	$\oint\limits_C \dfrac{z^2+1}{z^3+1}dz$	$\lvert z\rvert=2$
4	$\oint\limits_C z^2 e^{-\frac{1}{z}}dz$	$\lvert z\rvert=i$
5	$\oint\limits_C z^2\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}dz$	$\lvert z\rvert=2$
6	$\oint\limits_C z\cos\dfrac{1}{z}dz$	$\lvert z\rvert=2$

7	$\oint_C \frac{z^3+1}{\left(z^2+1\right)^2}dz$	$\lvert z\rvert=2$
8	$\oint_C \frac{e^z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$	$\lvert z+1\rvert=1$
9	$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$	$\lvert z\rvert=2$
10	$\oint_C \frac{\operatorname{ch} z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}dz$	$\lvert z-\pi i\rvert=\pi$
11	$\oint_C \frac{\sin z}{\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)^2}dz$	$\left\lvert z-\frac{\pi}{2}\right\rvert=1$
12	$\oint_C \frac{\ln z}{\left(z^2+1\right)^2}dz$	$\lvert z-i\rvert=0.5$
13	$\oint_C \frac{\ln(z+1)}{\left(z^2-1\right)^2}dz$	$\lvert z-1\rvert=1$
14	$\oint_C \frac{e^{-z}}{z(z-1)^3}dz$	$\lvert z-1\rvert=2$
15	$\oint_C \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^2}dz$	$\lvert z-\pi\rvert=4$
16	$\oint_C \frac{(z+\alpha)^2 e^z \sin \pi z}{(z-\alpha)}dz$	$\lvert z-\alpha\rvert=1$
17	$\oint_C \frac{z^3}{(z+1)^3(z-2)}dz$	$\lvert z-2\rvert=2$
18	$\oint_C \frac{\left(z^2+1\right)}{z^2(z+2)^2}dz$	$\lvert z\rvert=1$
19	$\oint_C \frac{z^3}{(z-1)^3(z+2)}dz$	$\lvert z-1\rvert=2$
20	$\oint_C \frac{e^{iz}z}{z^2+1}dz$	$\lvert z-i\rvert=1$
21	$\oint_C \frac{e^{-iz}\left(1-z^2\right)}{z^2+1}dz$	$\lvert z+i\rvert=1$
22	$\oint_C \frac{\operatorname{sh} z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}dz$	$\lvert z-\pi i\rvert=\pi$

23	$\oint\limits_C \frac{\sin^2 z}{\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)^2}dz$	$\left\lvert z+\frac{\pi}{2}\right\rvert=1$
24	$\oint\limits_C \frac{\operatorname{tg} z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}dz$	$\left\lvert z-\frac{\pi}{4}\right\rvert=0.5$
25	$\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch}\pi z}{\left(z^2+1\right)^3}dz$	$\lvert z-i\rvert=1$
26	$\oint\limits_C \frac{\ln(1+z)}{\left(z^2-1\right)^3}dz$	$\lvert z-1\rvert=1$
27	$\oint\limits_C \frac{e^z\ln(z+\alpha)}{(z-\alpha)^2}dz$	$\lvert z-\alpha\rvert=\alpha \quad (\alpha>0)$
28	$\oint\limits_C \frac{dz}{\left(z^4-\alpha^4\right)^2}$	$\lvert z-i\alpha\rvert=\alpha \quad (\alpha>0)$
29	$\oint\limits_C \frac{\operatorname{th}\frac{\pi z}{4}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$	$\lvert z-i\rvert=0.5$
30	$\oint\limits_C \frac{e^{iz}\cos z}{(z-\pi)^3}dz$	$\lvert z-\pi\rvert=\pi$

<u>Задача 10</u>. Найти аналитическую функцию, которая конформно отображает на верхнюю полуплоскость область D комплексной плоскости, изображенную на рисунке (все границы – отрезки прямых или дуги окружностей).

№ Варианта	Область D	№ Варианта	Область D
1		16	
2		17	
3		18	
4		19	

5		20	
6		21	
7		22	
8		23	
9		24	
10		25	
11		26	
12		27	
13		28	
14		29	
15		30	

1

2

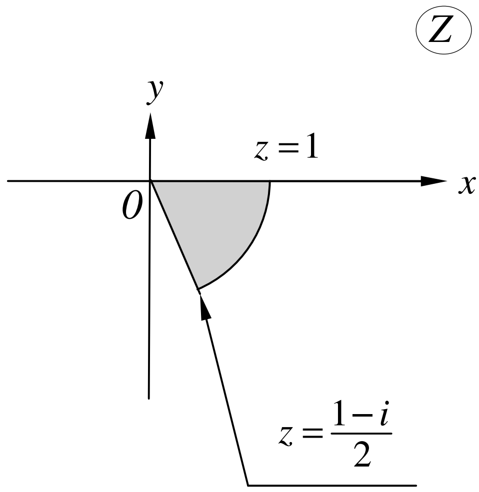


Рис. 1

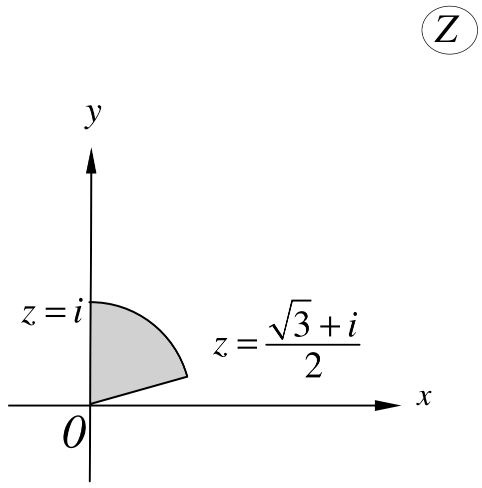


Рис.52

3

4

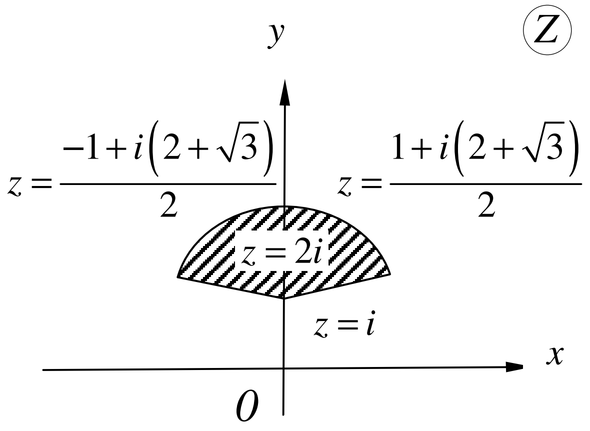


Рис.53

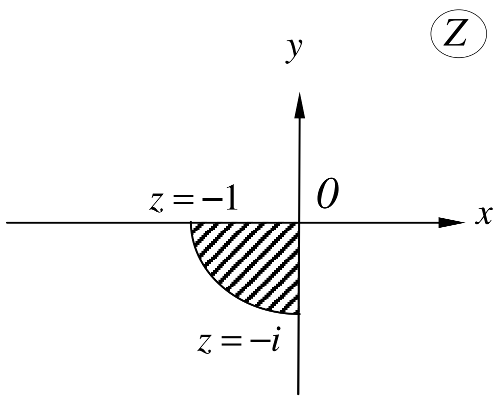


Рис.54

5

6

7

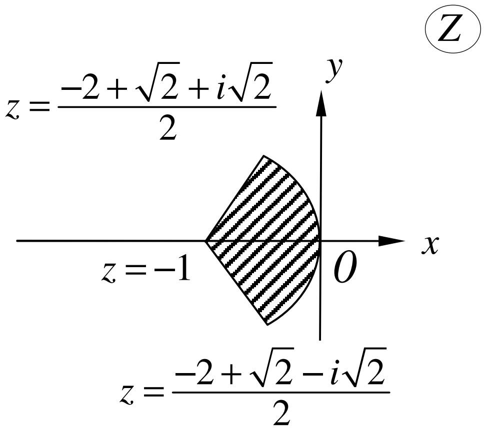


Рис.55

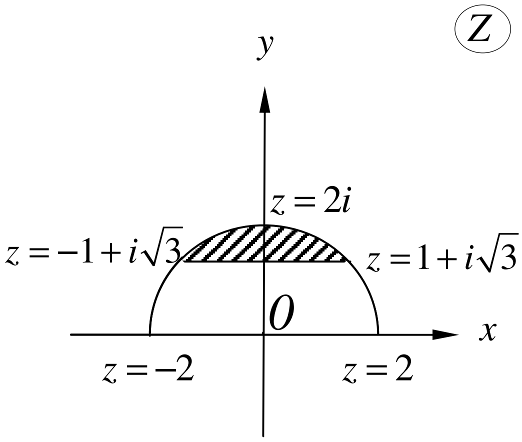


Рис.56

7

8

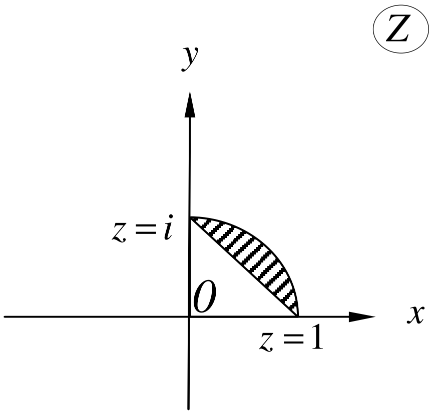


Рис.57

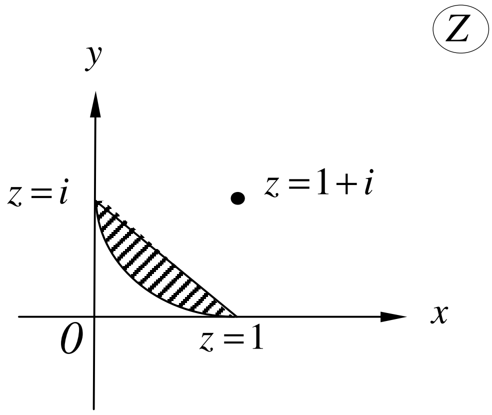


Рис.58

9

10

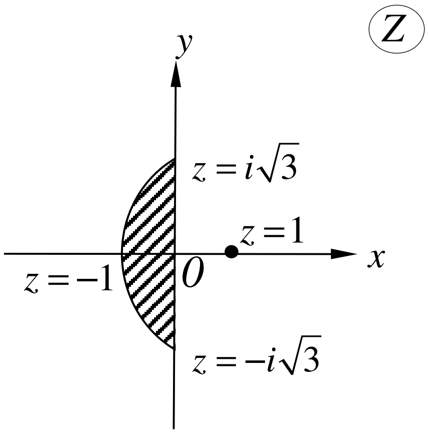


Рис.59

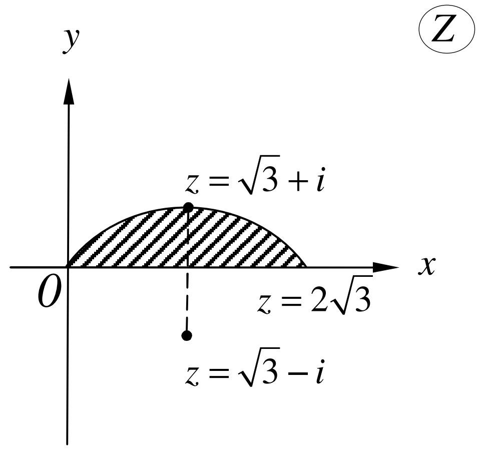


Рис.60

11

12

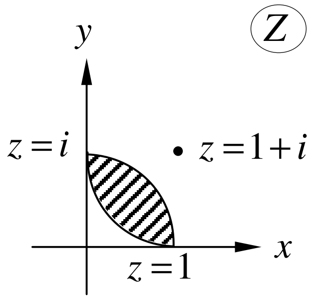


Рис. 61

13

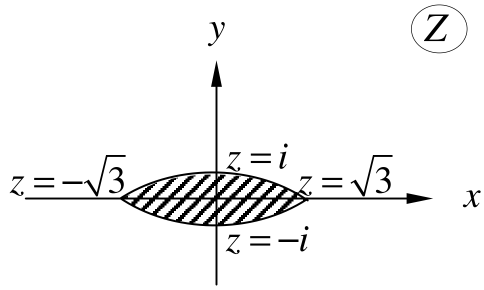


Рис. 628

14

9

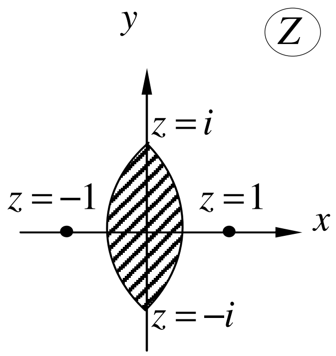
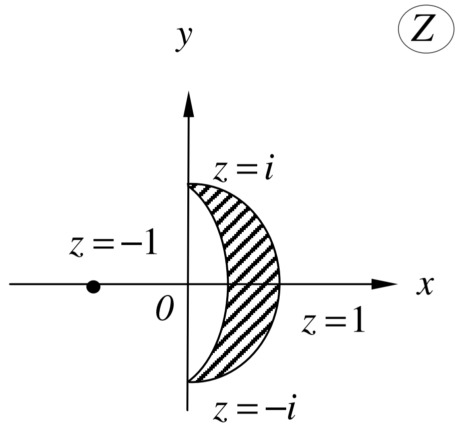


Рис. 63

15



0

Рис.64

16

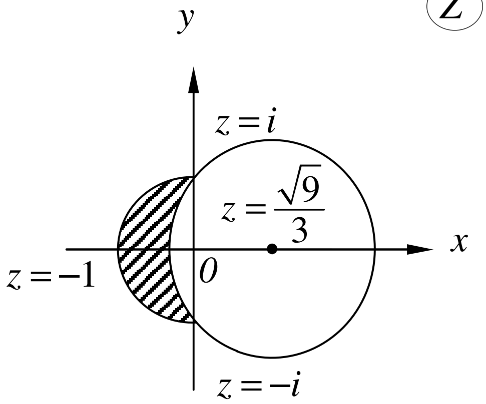


Рис.65

17

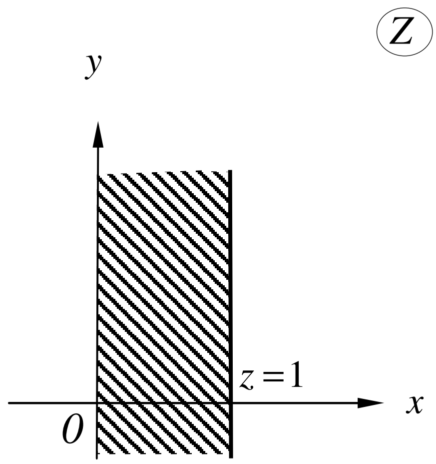


Рис.66

18

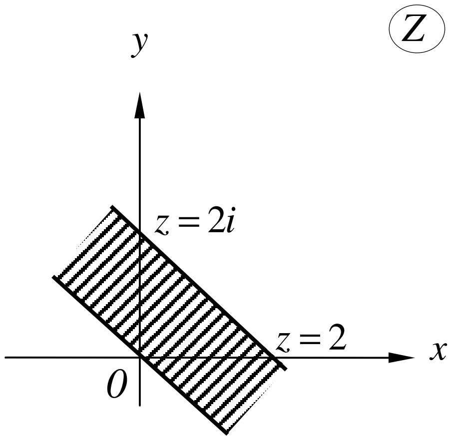


Рис.67

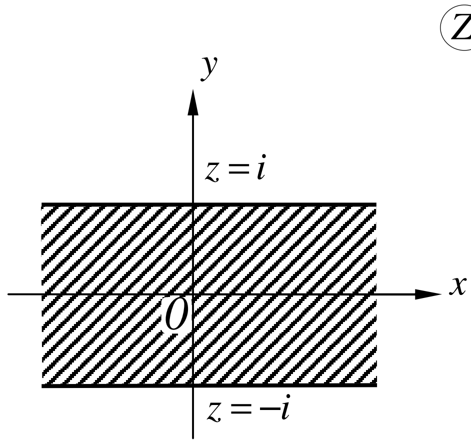


Рис.68

19

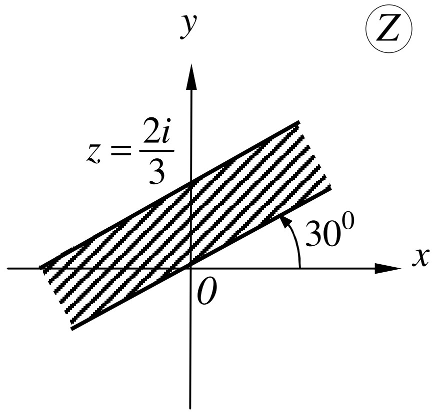


Рис.69

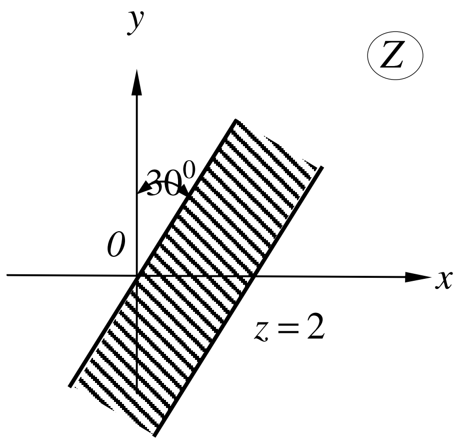


Рис.70

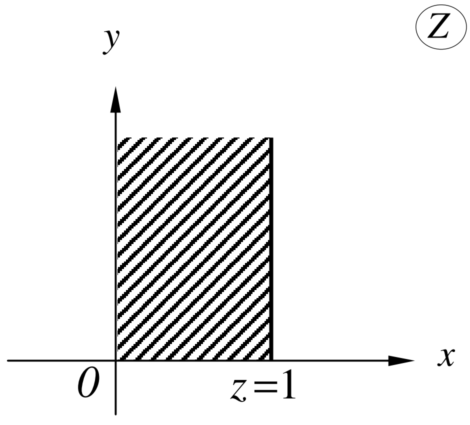


Рис.71

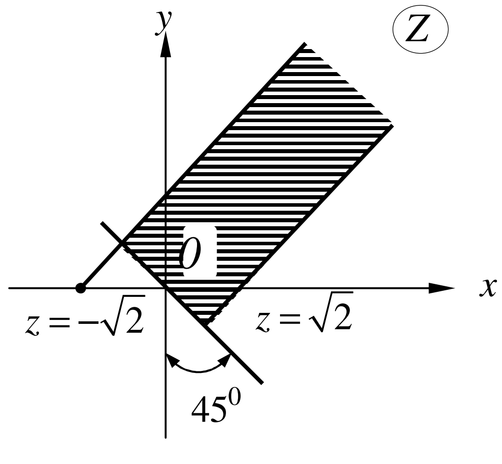


Рис.72

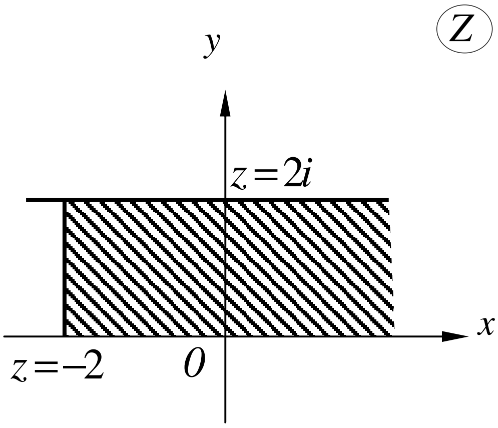


Рис.73

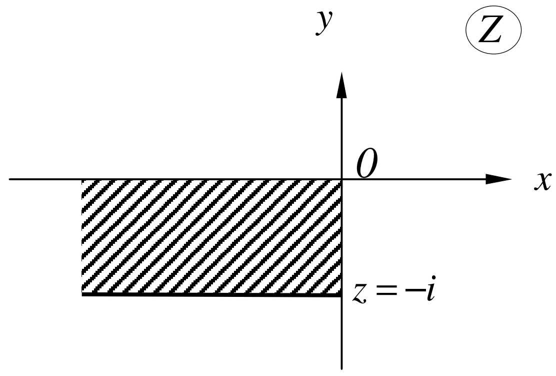


Рис.74

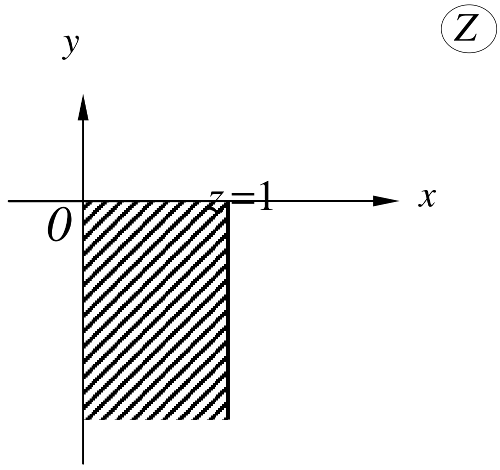


Рис.75

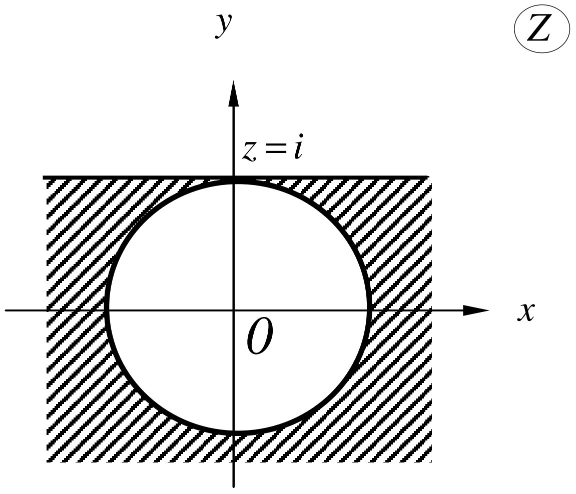


Рис.76

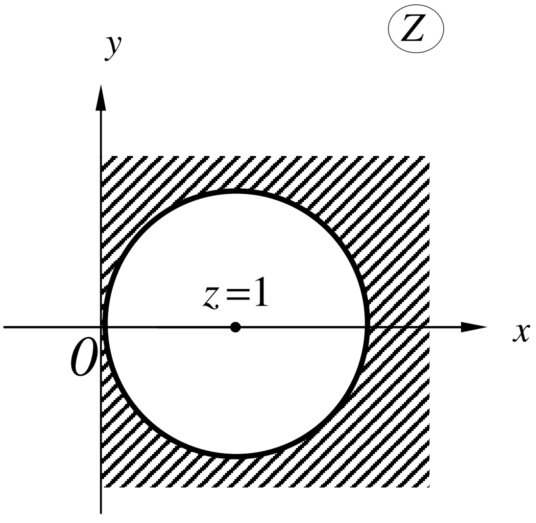


Рис.77

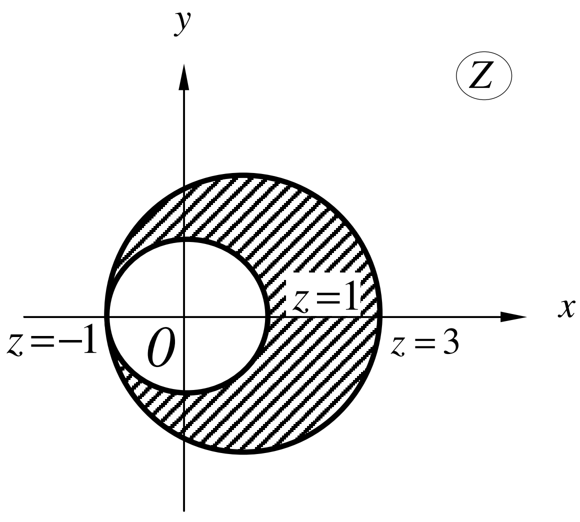


Рис.78

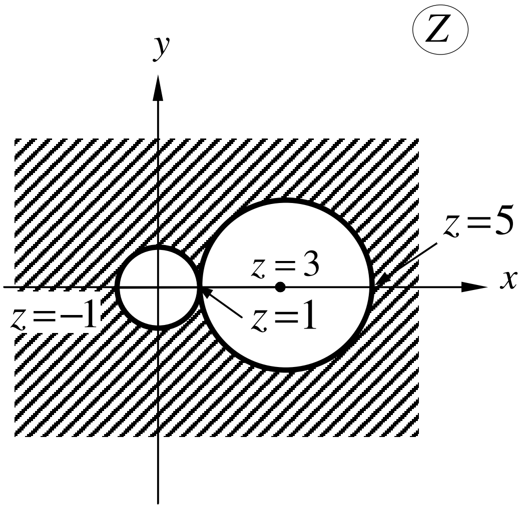


Рис.79

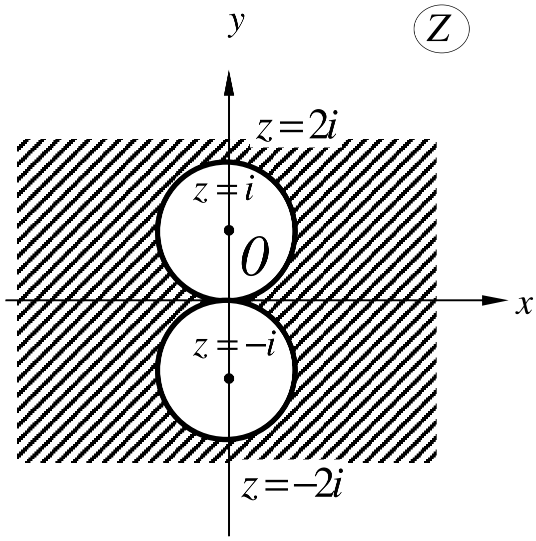


Рис.30